第67卷第1期 数学学报中文版 Vol.67, No.1
2024年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2024

DOI: 10.12386/b20220544 **文献标识码: A**

Boccardo 和 Orsina 引理的推广及应用

高红亚 高 萌

河北大学数学与信息科学学院 保定 071002
E-mail: ghy@hbu.cn; 18231205489@163.com

高斯宇

北卡罗莱那大学夏洛特分校数学与统计系, 北卡罗莱那州夏洛特, 28223, 美国
E-mail: siyugao@my.unt.edu

摘 要 给出 Boccardo 和 Orsina 一个技术引理的推广, 并给出其在能量空间中非强制积分泛函极小的正则性中的应用.

关键词 Boccardo 和 Orsina 引理的推广; 正则性; 极小; 积分泛函
MR(2010) 主题分类 49N60, 35J70
中图分类 O177.2

A Generalization of Lemma of Boccardo and Orsina and Application

Hong Ya GAO Meng GAO

College of Mathematics and Information Science, Hebei University, Baoding 071002*, P. R. China*
E-mail: *ghy@hbu.cn*; 18231205489*@*163*.com*

Si Yu GAO

Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, Charlotte NC, 28223 *USA*
E-mail: *siyugao@my.unt.edu*

Abstract We present a generalization of a technical lemma due to Boccardo and Orsina, and then give an application to regularity of minima for integral functionals noncoercive in the energy space.

Keywords generalization of a lemma of Boccardo and Orsina; regularity; minima; integral functional
MR(2010) Subject Classification 49N60, 35J70
Chinese Library Classification O177.2

收稿日期: 2022-09-05; 接受日期: 2023-01-03
基金项目: 第一作者国家自然科学基金 (12071021);
河北省自然科学基金 (A2019201120) 和河北省高等学校科学技术研究重点项目 (ZD2021307)
通讯作者: 高斯宇

1 引言

Boccardo 和 Orsina 在文 [2] 中考虑能量空间中某些非强制积分泛函极小的正则性时, 证明了一个有用的引理, 并研究了源函数 f 属于 Marcinkiewicz 空间时某种积分泛函极小的正则性. Boccardo 和 Orsina 考虑了下面形式的积分泛函

$$\mathscr{J}(v)=\int_\Omega a(x,v)j(\nabla v)dx-\int_\Omega fvdx,\quad v\in W_0^{1,p}(\Omega),\tag{1.1}$$

这里 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ 中的有界开子集, $1<p<n$, 源函数 f 满足

$$f\in L^r(\Omega),\quad r\geq (p^*)',\tag{1.2}$$

这里 $p^*=\frac{np}{n-p}$ 为 p 的 Sobolev 指数, $(p^*)'=\frac{np}{np-n+p}$ 为 p^* 的 Hölder 共轭指数, $a(x,s):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 Carathéodory 函数 (即 $a(x,s)$ 对所有的 $s\in\mathbb{R}$ 关于 x 可测, 对几乎所有的 $x\in\Omega$ 关于 s 连续), 使得对几乎所有的 $x\in\Omega$ 和所有的 $s\in\mathbb{R}$, 有

$$a(x,s)=\frac{\beta_1}{(b(x)+|s|)^{\alpha p}},\tag{1.3}$$

这里 $\beta_1>0$,

$$0<\alpha<\frac{1}{p'},\tag{1.4}$$

$b(x)$ 是 Ω 中满足下列条件的可测函数: 对几乎所有的 $x\in\Omega$,

$$0<\beta_2\leq b(x)\leq\beta_3<+\infty.\tag{1.5}$$

此外, $j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸函数, 满足 $j(0)=0$, 且存在 $\beta_4,\beta_5>0$, 使得对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\beta_4|\xi|^p\leq j(\xi)\leq\beta_5(1+|\xi|^p).\tag{1.6}$$

虽然当 f 满足 (1.2) 时积分泛函 (1.1) 有意义, 但 $\mathscr{J}(v)$ 在能量空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中是不强制的, 即存在函数 f 以及序列 $\{u_n\}$, 当 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的范数趋向于 $+\infty$ 时, $\mathscr{J}(u_n)$ 趋向于 $-\infty$, 见文 [2, 例3.3]. 因此不能应用 Weierstrass 定理 (见专著 [1, 定理9.1]), 也即积分泛函 $\mathscr{J}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中可能不存在极小. 考虑 $\mathscr{J}$ 的极小的一个思想方法是把空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 扩大为 $W_0^{1,q}(\Omega)$, 其中

$$q=\frac{np(1-\alpha)}{n-\alpha p}<p,\tag{1.7}$$

并定义

$$\mathscr{I}(v)=\begin{cases}\mathscr{J}(v), & \text{如果 } \mathscr{J}(v) \text{ 有限},\\ +\infty, & \text{否则}.\end{cases}\tag{1.8}$$

函数 $u\in W_0^{1,q}(\Omega)$ 称为积分泛函 (1.8) 的极小, 如果对所有的 $v\in W_0^{1,q}(\Omega)$, 有

$$\mathscr{I}(u)\leq\mathscr{I}(v).\tag{1.9}$$

文 [2, 定理2.1] 得到下面的结果: 设 f 属于 $L^r(\Omega)$, $r\geq[p^*(1-\alpha)]'$, 则积分泛函 $\mathscr{I}$ 在 $W_0^{1,q}(\Omega)$ 中强制且弱下半连续. 由 Weierstrass 定理, $\mathscr{I}$ 在 $W_0^{1,q}(\Omega)$ 空间中存在极小.

下面给出 Marcinkiewicz 空间 $M^r(\Omega)$ $(r>0)$ 的定义 (见专著 [1, 定义3.8]). $M^r(\Omega)$ 由所有满足下列条件的可测函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 组成: 存在常数 $c>0$, 使得对任意的 $t>0$, 有

$$|\{x\in\Omega:|f(x)|>t\}|\leq\frac{c}{t^r}.\tag{1.10}$$

$f \in M^r(\Omega)$ 的范数定义如下:

$$\|f\|^r_{M^r(\Omega)} = \inf\{c > 0 : (1.10) \text{ 成立}\}.$$

下面的性质见专著 [1, 命题3.12和命题3.13]: 若 Ω 具有有限测度, 则对任意的 $r > 1$ 和任意的 $0 < \varepsilon \le r-1$, 有

$$L^r(\Omega) \subset M^r(\Omega) \subset L^{r-\varepsilon}(\Omega). \tag{1.11}$$

若 $f \in M^r(\Omega)$, $r > 1$, 则存在正常数 $B = B(\|f\|_{M^r(\Omega)}, r)$, 使得对任意可测集 $E \subset \Omega$, 有

$$\int_E |f|dx \le B|E|^{1-\frac{1}{r}}. \tag{1.12}$$

在文 [2] 中, Boccardo 和 Orsina 得到了当

$$f \in M^r(\Omega), \quad [p^*(1-\alpha)]' < r < \frac{n}{p}, \tag{1.13}$$

时 u 和 ∇u 的正则性性质. 下面的命题见文 [2, 定理6.3].

命题 1.1 设 $f \in M^r(\Omega)$, $[p^*(1-\alpha)]' < r < \frac{n}{p}$, 则 $\mathscr{I}$ 的任意极小 u 属于 $M^s(\Omega)$, 其中 $s = \frac{nr(p(1-\alpha)-1)}{n-rp}$, 并且:

a) 若 $(\frac{p^*}{1+\alpha p})' < r < \frac{n}{p}$, 则 u 属于 $W_0^{1,p}(\Omega)$;

b) 若 $[p^*(1-\alpha)]' < r \le (\frac{p^*}{1+\alpha p})'$, 则 $|\nabla u|$ 属于 $M^\rho(\Omega)$, 其中 $\rho = \frac{nr[p(1-\alpha)-1]}{n-r(1+\alpha p)}$.

注 1.2 当 $r > \frac{n}{p}$ 时, $\mathscr{I}$ 的极小是有界的, 见文 [2, 定理1.2].

证明命题 1.1 的主要工具是下面的技术引理, 见文 [2, 引理6.1].

引理 1.3 设 $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 为非增函数, 且满足

$$\psi(h) \le c\frac{k^A\psi(k)^B + \psi(k)^C}{(h-k)^D}, \quad \forall\, h > k \ge 0, \tag{1.14}$$

这里 c 为正常数, A, B, C, D 满足

$$A < D, \quad C < B < 1, \quad \frac{D-A}{1-B} = \frac{D}{1-C}, \tag{1.15}$$

则存在 $\bar{k} \ge 0$, $\bar{c} > 0$, 使得

$$\psi(k) \le \bar{c}k^{-\frac{D-A}{1-B}} = \bar{c}k^{-\frac{D}{1-C}}, \quad \forall\, k \ge \bar{k}. \tag{1.16}$$

上述引理与经典的 Stampacchia 引理 (见文 [10, 引理4.1]) 很相似, 而 Stampacchia 引理至今仍被许多数学家反复应用于研究椭圆偏微分方程的弱解和积分泛函极小的正则性问题.

回到命题 1.1. 对 $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $f \in M^r(\Omega)$, $r > [p^*(1-\alpha)]' = (q^*)'$, 由 Sobolev 嵌入定理知第二个积分 $\int_\Omega fvdx$ 有定义. 一个自然的问题是: 当 $r = \frac{n}{p}$ 时, 积分泛函 $\mathscr{I}$ 的极小是否具有正则性性质? 为了回答这个问题, 需要对引理 1.3 进行推广.

2 引理 1.3 的推广

引理 2.1 设 c_1, A, B, C, D 为正常数, $A < D$, $k_0 \ge 0$. 设 $\psi : [k_0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 非增, 且对任意的 $h > k \ge k_0$, 有

$$\psi(h) \le c_1\frac{h^A\psi(k)^B + \psi(k)^C}{(h-k)^D}, \tag{2.1}$$

i) 若 $k_0>0$, $C<B<1$, $\frac{D-A}{1-B}=\frac{D}{1-C}$, 则存在正常数 $\bar{c}_1$, 使得对任意 $k\geq k_0$,

$$\psi(k)\leq \bar{c}_1 k^{-\frac{D-A}{1-B}}=\bar{c}_1 k^{-\frac{D}{1-C}}; \tag{2.2}$$

ii) 若 $B=C=1$, 则对任意 $k\geq k_0$, 有

$$\psi(k)\leq \psi(k_0)\mathrm{e}^{1-(\frac{k-k_0}{\tau})^{\frac{D-A}{D}}}, \tag{2.3}$$

其中

$$\tau=\max\left\{k_0+1,\left(\frac{2c_1e2^{\frac{(2D-A)A}{D-A}}(D-A)^D}{D^D}\right)^{\frac{1}{D-A}},(c_1e2^{1+A})^{\frac{1}{D-A}}\right\}; \tag{2.4}$$

iii) 若 $B>C>1$, 则

$$\psi(2L)=0, \tag{2.5}$$

其中

$$\begin{aligned}L=\max\{&1,2k_0,(c_1 2^{1+D}(1+\psi(k_0))^B)^{\frac{1}{D-A}},\\&(c_1^{\frac{C}{C-1}}(1+\psi(k_0))^B 2^{D+1+\frac{A+D+1}{C-1}+\frac{D}{(C-1)^2}})^{\frac{C-1}{(D-A)C}}\}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

引理 2.1 的 i) 和引理 1.3 的区别是 k_0 代替了 0, h^A 代替了 k^A. 另外, 上述引理的部分思想来源于文 [2–6, 8, 9].

在引理 2.1 中 iii) 的证明中将使用下面的引理, 它来自专著 [7, 引理7.1].

引理 2.2 设 $\beta,M,\bar{C},x_i$ 满足 $\beta>1$, $\bar{C}>0$, $M>1$, $x_i\geq 0$, 且

$$x_{i+1}\leq \bar{C}M^i x_i^{\beta},\quad i=0,1,2,\ldots. \tag{2.7}$$

若 $x_0\leq \bar{C}^{-\frac{1}{\beta-1}}M^{-\frac{1}{(\beta-1)^2}}$, 则 $x_i\leq M^{-\frac{i}{\beta-1}}x_0$, $i=0,1,2,\ldots$, 于是 $\lim_{i\to+\infty}x_i=0$.

引理 2.1 的证明

i) 定义

$$\lambda=\frac{D-A}{1-B}=\frac{D}{1-C}, \tag{2.8}$$

$\rho(h)=h^\lambda\psi(h)$. 由 (2.1) 得到

$$\rho(h)\leq c_1\frac{h^\lambda(h^A\psi(k)^B+\psi(k)^C)}{(h-k)^D},\quad \forall\, h>k\geq k_0.$$

在上述不等式中取 $h=2k$, 得到对所有的 $k\geq k_0$,

$$\begin{aligned}\rho(2k)&\leq c_1\frac{(2k)^\lambda((2k)^A\psi(k)^B+\psi(k)^C)}{k^D}\\&\leq c_1\frac{2^{\lambda+A}(k^{\lambda+A}\psi(k)^B+k^\lambda\psi(k)^C)}{k^D}\\&=c_1\frac{2^{\lambda+A}(k^{\lambda+A-\lambda B}\rho(k)^B+k^{\lambda-\lambda C}\rho(k)^C)}{k^D}.\end{aligned}$$

由 (2.8) 中 λ 的定义可知 $\lambda+A-\lambda B=D$, $\lambda-\lambda C=D$, 于是上述不等式变成对所有的 $k\geq k_0$,

$$\rho(2k)\leq c_1 2^{\lambda+A}\left(\rho(k)^B+\rho(k)^C\right). \tag{2.9}$$

我们断言, 对任意整数 $n\geq 0$,

$$\rho(2^n k_0)\leq c_1^{\frac{1}{1-B}}2^{\frac{\lambda+A+1}{1-B}}\left(1+\rho(k_0)\right)^{B^n} \tag{2.10}$$

成立. 事实上, $n=0$ 时 (2.10) 显然 (不失一般性, 可设 $c_1\geq 1$, 于是 $c_1^{\frac{1}{1-B}}2^{\frac{\lambda+A+1}{1-B}}\geq 1$, 由此推出 $n=0$ 时 (2.10) 成立). 设 (2.10) 对 $n\in\mathbb{N}$ 成立, 下面对 n 进行归纳. 因为 $C<B<1$, 所以使用 $k=k_0$ 时的 (2.9) 式, 得到

$$\begin{aligned}\rho(2k_0)&\leq c_1 2^{\lambda+A}(\rho(k_0)^B+\rho(k_0)^C)\leq c_1 2^{\lambda+A+1}(1+\rho(k_0))^B\\&\leq c_1^{\frac{1}{1-B}}2^{\frac{\lambda+A+1}{1-B}}(1+\rho(k_0))^B.\end{aligned}$$

利用 (2.9), (2.10) 和上述不等式可得

$$\begin{aligned}\rho(2^{n+1}k_0)&\leq c_1 2^{\lambda+A}(\rho(2^nk_0)^B+\rho(2^nk_0)^C)\\&\leq c_1 2^{\lambda+A}\big[(c_1^{\frac{1}{1-B}}2^{\frac{\lambda+A+1}{1-B}}(1+\rho(k_0))^{B^n})^B+(c_1^{\frac{1}{1-B}}2^{\frac{\lambda+A+1}{1-B}}(1+\rho(k_0))^{B^n})^C\big]\\&\leq c_1^{1+\frac{B}{1-B}}2^{\lambda+A}\big[2^{\frac{(\lambda+A+1)B}{1-B}}(1+\rho(k_0))^{B^{n+1}}+2^{\frac{(\lambda+A+1)B}{1-B}}(1+\rho(k_0))^{B^{n+1}}\big]\\&\leq c_1^{\frac{1}{1-B}}2^{(\lambda+A+1)(1+\frac{B}{1-B})}(1+\rho(k_0))^{B^{n+1}}\\&=c_1^{\frac{1}{1-B}}2^{\frac{\lambda+A+1}{1-B}}(1+\rho(k_0))^{B^{n+1}}.\end{aligned}$$

因此 (2.10) 对 $n+1$ 成立. 所以 (2.10) 对于任意的 $n\geq 0$ 成立.

因为 $B<1$, 所以对 $n\geq 0$, 有 $(1+\rho(k_0))^{B^n}\leq 1+\rho(k_0)$, 由 (2.10) 得到

$$\rho(2^nk_0)\leq c_1^{\frac{1}{1-B}}2^{\frac{\lambda+A+1}{1-B}}(1+\rho(k_0)):=M,\quad n\geq 0,\tag{2.11}$$

因此由 ρ 的定义得

$$\psi(2^nk_0)\leq\frac{M}{(2^nk_0)^\lambda}.\tag{2.12}$$

对任意 $k\geq k_0$, 存在 $k'\in[k_0,2k_0)$, $n\geq 0$, 使得 $k=2^nk'$, 因此 $2^nk_0\leq k<2^{n+1}k_0$. 因为 ψ 非增, 所以由 (2.12) 得

$$\psi(k)\leq\psi(2^nk_0)\leq\frac{M}{(2^nk_0)^\lambda}=\frac{2^\lambda M}{(2^{n+1}k_0)^\lambda}\leq\frac{2^\lambda M}{k^\lambda},$$

因此 (2.2) 对 $\bar{c}_1=2^\lambda M$ 成立, 其中 λ, M 分别由 (2.8) 和 (2.11) 定义.

ii) 设 $B=C=1$, τ 由 (2.4) 定义. 对于 $s=0,1,2,\ldots$, 设 $k_s=k_0+\tau s^{\frac{D}{D-A}}$, 则 $\{k_s\}$ 为递增序列, 且 $k_{s+1}-k_s=\tau[(s+1)^{\frac{D}{D-A}}-s^{\frac{D}{D-A}}]$. 由泰勒公式得

$$k_{s+1}-k_s=\tau\left[\frac{D}{D-A}s^{\frac{A}{D-A}}+\frac{AD}{(D-A)^2}\xi^{\frac{2A-D}{D-A}}\right]\geq\frac{\tau D}{D-A}s^{\frac{A}{D-A}},\tag{2.13}$$

其中 ξ 属于开区间 $(s,s+1)$. 在 (2.1) 中取 $B=C=1$, $k=k_s$, $h=k_{s+1}$, 由 (2.13) 得到当 $s\in\mathbb{N}^+=\{1,2,\ldots\}$ 时,

$$\psi(k_{s+1})\leq c_1\frac{[k_0+\tau(s+1)^{\frac{D}{D-A}}]^A\psi(k_s)+\psi(k_s)}{(\frac{\tau D}{D-A})^Ds^{\frac{AD}{D-A}}}\leq 2c_1\frac{[k_0+1+\tau(2s)^{\frac{D}{D-A}}]^A\psi(k_s)}{(\frac{\tau D}{D-A})^Ds^{\frac{AD}{D-A}}}.\tag{2.14}$$

由 (2.4) 得到 $s\in\mathbb{N}^+$ 时,

$$k_0+1\leq\tau<\tau(2s)^{\frac{D}{D-A}},\quad\frac{2c_1(2^{1+\frac{D}{D-A}}\tau)^A}{(\frac{\tau D}{D-A})^D}\leq\frac{1}{e}.$$

由 (2.14) 和上述不等式得

$$\psi(k_{s+1})\leq\frac{2c_1(2\tau(2s)^{\frac{D}{D-A}})^A}{(\frac{\tau D}{D-A})^Ds^{\frac{AD}{D-A}}}\psi(k_s)=\frac{2c_1(2^{1+\frac{D}{D-A}}\tau)^A}{(\frac{\tau D}{D-A})^D}\psi(k_s)\leq\frac{1}{e}\psi(k_s).$$

迭代后就有

$$\psi(k_s) \le \frac{1}{\mathrm{e}^{s-1}}\psi(k_1), \quad \forall\, s \in \mathbb{N}^+.$$

在 (2.1) 中取 $h = k_1$, $k = k_0$ 得到

$$\psi(k_1) \le \frac{c_1 2^{1+A}}{\tau^{D-A}}\psi(k_0).$$

因为 $\frac{c_1 2^{1+A}}{\tau^{D-A}} \le \frac{1}{e}$, 所以

$$\psi(k_1) \le \frac{1}{e}\psi(k_0).$$

于是

$$\psi(k_s) \le \frac{1}{\mathrm{e}^{s}}\psi(k_0), \quad \forall\, s \in \mathbb{N}^+.$$

上述不等式对 $s = 0$ 亦成立. 任意 $k \ge k_0$, 存在 $s \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$, 使得

$$k_0 + \tau s^{\frac{D}{D-A}} \le k < k_0 + \tau(s+1)^{\frac{D}{D-A}}.$$

考虑到 $\psi(k)$ 非增, 有

$$\psi(k) \le \psi(k_0 + \tau s^{\frac{D}{D-A}}) = \psi(k_s) \le \mathrm{e}^{-s}\psi(k_0) \le \psi(k_0)\mathrm{e}^{1-(\frac{k-k_0}{\tau})^{\frac{D-A}{D}}}.$$

iii) 对 $B > C > 1$, 固定 $L \ge \max\{1, 2k_0\}$ (由此推出 $L - k_0 \ge \frac{L}{2}$), 使得 $\psi(L) \le 1$. 这总能做到, 因为在 (2.1) 中可选择 $h = L$, $k = k_0$, 利用 $A < D$ 得到

$$\psi(L) \le c_1 \frac{L^A \psi(k_0)^B + \psi(k_0)^C}{(L-k_0)^D} \le c_1 \frac{2L^A(1+\psi(k_0))^B}{(L-k_0)^D} \le c_1 \frac{2^{1+D}(1+\psi(k_0))^B}{L^{D-A}},$$

这样, 若

$$L^{D-A} \ge c_1 2^{1+D}(1+\psi(k_0))^B, \tag{2.15}$$

则有 $\psi(L) \le 1$.

取 $\tilde{k}_i = 2L(1-2^{-i-1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. 显然 $k_0 = L \le \tilde{k}_i < 2L$, $\{\tilde{k}_i\}$ 递增, 且 $\lim_{i\to+\infty}\tilde{k}_i = 2L$. 在 (2.1) 中取 $k = \tilde{k}_i$, $h = \tilde{k}_{i+1}$. 设

$$x_i = \psi(\tilde{k}_i), \quad x_{i+1} = \psi(\tilde{k}_{i+1}),$$

注意到

$$h - k = \tilde{k}_{i+1} - \tilde{k}_i = L2^{-i-1}, \quad x_i = \psi(\tilde{k}_i) \le \psi(L) \le 1,$$

所以对 $i = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\le c_1 \frac{[2L(1-2^{-i-2})]^A x_i^B + x_i^C}{(L2^{-i-1})^D} \\ &\le 2c_1 \frac{[2L(1-2^{-i-2})]^A}{(L2^{-i-1})^D} x_i^C \le c_1 \frac{2^{A+D+1}(2^D)^i}{L^{D-A}} x_i^C. \end{aligned}$$

因此 (2.7) 对

$$\bar{C} = \frac{c_1 2^{A+D+1}}{L^{D-A}}, \quad M = 2^D, \quad \beta = C > 1$$

成立. 由引理 2.2 知, 当

$$x_0 = \psi(\tilde{k}_0) = \psi(L) \le \left(\frac{c_1 2^{A+D+1}}{L^{D-A}}\right)^{-\frac{1}{C-1}} (2^D)^{-\frac{1}{(C-1)^2}} \tag{2.16}$$

时, 有

$$\lim_{i\to+\infty} x_i = \lim_{i\to+\infty} \psi(\tilde{k}_i) = 0. \tag{2.17}$$

注意到由 (2.17) 可得

$$\psi(2L) = 0.$$

下面说明 (2.16) 成立, 并由此确定 L 的取值. (2.16) 等价于

$$\psi(L) \le c_1^{-\frac{1}{C-1}} 2^{-\frac{A+D+1}{C-1}-\frac{D}{(C-1)^2}} L^{\frac{D-A}{C-1}}. \tag{2.18}$$

在 (2.1) 中取 $k=k_0$, $h=L\ge\max\{1,2k_0\}$, 得到

$$\begin{aligned}\psi(L) &\le c_1\frac{L^A\psi(k_0)^B+\psi(k_0)^C}{(L-k_0)^D} \le \frac{2c_1L^A(1+\psi(k_0))^B}{(L-k_0)^D}\\ &\le \frac{2^{D+1}c_1L^A(1+\psi(k_0))^B}{L^D} = \frac{2^{D+1}c_1(1+\psi(k_0))^B}{L^{D-A}}.\end{aligned}$$

若 $\psi(L)\le 1$,

$$\begin{aligned}&L\ge\max\{1,2k_0\},\\ &\frac{2^{D+1}c_1(1+\psi(k_0))^B}{L^{D-A}} \le c_1^{-\frac{1}{C-1}} 2^{-\frac{A+D+1}{C-1}-\frac{D}{(C-1)^2}} L^{\frac{D-A}{C-1}},\end{aligned} \tag{2.19}$$

则有 (2.18). 上述不等式等价于

$$c_1^{\frac{C}{C-1}}(1+\psi(k_0))^B 2^{D+1+\frac{A+D+1}{C-1}+\frac{D}{(C-1)^2}} \le L^{\frac{(D-A)C}{C-1}}. \tag{2.20}$$

(2.6) 是 (2.15), (2.19), (2.20) 的充分条件. 引理 2.1 证毕.

注意到, 在引理 2.1 中 i) 的证明中取 $h=2k$. 现在在 (2.1) 中取 $h=2k$, 并用 c_2 代替 c_1, 即

$$\psi(2k) \le c_2\frac{(2k)^A\psi(k)^B+\psi(k)^C}{k^D}, \quad \forall\, k\ge k_0. \tag{2.21}$$

注 2.3 设 (2.1) 成立. 取 $h=2k$ 得到 (2.21) 对 $c_2=c_1$ 成立. 即由 (2.1) 可推出 (2.21).

注 2.4 若将 (2.1) 替换为 (2.21), 则引理 2.1 中的 i) 成立.

本节余下的部分考虑 (2.21) 和 (2.1) 的关系. 我们提出下面的问题: (2.21) 是否比 (2.1) 弱? 回答是不一定, 即不同的情况有不同的答案. 我们给出下面的三个注.

注 2.5 当 $C<B<1$ 时, (2.1) $\Leftrightarrow$ (2.21).

证明 "$\Rightarrow$" 见注 2.3.

"$\Leftarrow$" 设 (2.21) 成立. 考虑 $h>k\ge k_0$. 分下面两种情形: 存在 $n\ge1$ 使得 $2^{n+1}k\ge h>2^nk$ 和 $2k\ge h>k$.

情形 1 存在 $n\ge1$, 使得 $2^{n+1}k\ge h>2^nk$.

因为 ψ 递减, 所以 $\psi(h)\le\psi(2^nk)=\psi(2(2^{n-1}k))$; 注意到 $n\ge1$, 所以 $2^{n-1}k\ge k\ge k_0$, 在 (2.21) 中用 $2^{n-1}k$ 代替 k, 得到

$$\psi(2(2^{n-1}k)) \le c_2\frac{(2^nk)^A[\psi(2^{n-1}k)]^B+[\psi(2^{n-1}k)]^C}{(2^{n-1}k)^D} \le c_2\frac{h^A[\psi(2^{n-1}k)]^B+[\psi(2^{n-1}k)]^C}{(2^{n-1}k)^D}.$$

因为 $2^{n-1}k\ge k$, 所以由 ψ 的单调性得 $\psi(2^{n-1}k)\le\psi(k)$; 这样 $[\psi(2^{n-1}k)]^B\le[\psi(k)]^B$, $[\psi(2^{n-1}k)]^C \le [\psi(k)]^C$. 由 $2^{n+1}k\ge h$ 得 $(2^{n+1}-1)k\ge h-k$, 因此

$$2^{n-1}k = \frac{2^{n+1}k}{4} \ge \frac{(2^{n+1}-1)k}{4} \ge \frac{h-k}{4},$$

于是

$$\psi(h) \le \psi(2^n k) = \psi(2(2^{n-1}k)) \le c_2 \frac{h^A[\psi(2^{n-1}k)]^B + [\psi(2^{n-1}k)]^C}{(2^{n-1}k)^D}$$
$$\le 4^D c_2 \frac{h^A[\psi(k)]^B + [\psi(k)]^C}{(h-k)^D}.$$

情形 2 $2k \ge h > k$.

利用注 2.4 和引理 2.1 中的 i) 可得 (2.2). 利用 (2.2) 和 ψ 递减得

$$\psi(h) \le \psi(k) = [\psi(k)]^B[\psi(k)]^{1-B} \le [\psi(k)]^B \left[\bar{c}_1 \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{D-A}{1-B}}\right]^{1-B} = \bar{c}_1^{1-B} k^A [\psi(k)]^B \left(\frac{1}{k}\right)^D.$$

因为 $2k \ge h$, 所以 $k \ge h-k$, $(\frac{1}{k})^D \le (1h-k)^D$, 于是

$$\psi(h) \le \frac{\bar{c}_1^{1-B} h^A [\psi(k)]^B}{(h-k)^D} \le \bar{c}_1^{1-B} \frac{h^A[\psi(k)]^B + [\psi(k)]^C}{(h-k)^D}.$$

综上两种情形得 (2.1) 对 $c_1 = \max\{4^D c_2; \bar{c}_1^{1-B}\}$ 成立. 证毕.

注 2.6 当 $B = C = 1$ 时, 有

$$(2.1) \not\Leftarrow (2.21).$$

函数

$$\psi(k) = \mathrm{e}^{-(\ln k)^2}, \quad k \in [1, +\infty) \tag{2.22}$$

满足 $k_0 = 1$, $B = C = 1$, $c_2 = \frac{1}{2\ln 2}$, $D = 2\ln 2$ 和任意的 $0 < A < 2\ln 2$ 时的 (2.21), 但对 $B = C = 1$, 对任意选择的三个常数 $D > A > 0$ 和 $c_1 > 0$, 都不满足 (2.1).

证明 取 ψ 如 (2.22). 对任意 $k \ge 1$,

$$\psi(2k) = \mathrm{e}^{-[\ln(2k)]^2} = \mathrm{e}^{-(\ln 2 + \ln k)^2} = \mathrm{e}^{-(\ln k)^2 - 2\ln k \ln 2 - (\ln 2)^2}$$
$$= \mathrm{e}^{-(\ln k)^2} \mathrm{e}^{-2\ln k \ln 2 - (\ln 2)^2} = \psi(k) \mathrm{e}^{-(\ln 2)(2\ln k + \ln 2)}$$
$$= \psi(k) \mathrm{e}^{-(\ln 2)[\ln(2k^2)]} = \psi(k) \mathrm{e}^{\ln(2k^2)^{-\ln 2}} = \psi(k)(2k^2)^{-\ln 2}$$
$$= \psi(k) \left(\frac{1}{2k^2}\right)^{\ln 2} \le \frac{1}{2^{\ln 2}} \frac{(2k)^A \psi(k) + \psi(k)}{k^{2\ln 2}}.$$

这说明 (2.21) 对 $k_0 = 1$, $B = C = 1$, $c_2 = \frac{1}{2\ln 2}$, $D = 2\ln 2$ 和任意的 $0 < A < 2\ln 2$ 成立.

下面证明当 $B = C = 1$ 时, (2.1) 式对任意选择的三个常数 $D > A > 0$ 和 $c_1 > 0$ 都不成立: 用反证法, 如果 (2.1) 式成立, 则由引理 2.1 中的 ii) 可得 (2.3), 则 (注意到 $\psi(k_0) = \psi(1) = 1$) 存在一个合适的依赖于 c_1, A, D 的常数 τ, 成立

$$\psi(k) \le \mathrm{e}^{1 - \left(\frac{k-1}{\tau}\right)^{\frac{D-A}{D}}}, \quad \forall k \in [1, +\infty).$$

此即 $\mathrm{e}^{-(\ln k)^2} \le \mathrm{e}^{1 - \left(\frac{k-1}{\tau}\right)^{\frac{D-A}{D}}}$, 因此 $1 \le \mathrm{e}^{1 - \left(\frac{k-1}{\tau}\right)^{\frac{D-A}{D}} + (\ln k)^2}$, 但上式不成立, 因为

$$\lim_{k \to +\infty} 1 - \left(\frac{k-1}{\tau}\right)^{\frac{D-A}{D}} + (\ln k)^2 = -\infty.$$

证毕.

注 2.7 当 $B > C > 1$ 时,

$$(2.1) \not\Leftarrow (2.21).$$

函数

$$\psi(k) = \mathrm{e}^{-k^p}, \quad p = \log_2(2C), \quad k \in [1, +\infty) \tag{2.23}$$

满足 $B > C > 1$, $c_2 = 1$, 任意 $D > A > 0$ 和适当的 $k_0 = k_0(D, C) \geq 1$ 时的 (2.21), 但对任意选择的四个常数 $B > C > 1$, $D > A > 0$, $c_1 > 0$, 都不满足 (2.1).

证明 取 ψ 如 (2.23). 因为 $2^p = 2C$, 所以

$$\psi(2k) = \mathrm{e}^{-(2k)^p} = \mathrm{e}^{-2^p k^p} = \mathrm{e}^{-2Ck^p} = (\mathrm{e}^{-k^p})^{2C} = (\psi(k))^{2C} = (\mathrm{e}^{-k^p})^C (\psi(k))^C.$$

存在 $k_0 = k_0(D, C) \geq 1$, 使得

$$(\mathrm{e}^{-k^p})^C \leq \left(\frac{1}{k}\right)^D, \quad \forall\, k \in [k_0, +\infty).$$

则

$$\psi(2k) = (\mathrm{e}^{-k^p})^C (\psi(k))^C \leq \left(\frac{1}{k}\right)^D (\psi(k))^C,$$

所以 ψ 满足 $B > C > 1$, $c_2 = 1$, 任意 $D > A > 0$ 和适当的 $k_0 = k_0(D, C) \geq 1$ 时的 (2.21). 下证对任意选择的四个常数 $B > C > 1$, $D > A > 0$, $c_1 > 0$, ψ 都不满足 (2.1). 事实上, 若 ψ 满足 (2.1), 则由引理 2.1 中的 iii) 可得 (2.5), 即存在适当的 $L \geq 0$, 使得

$$\psi(2L) = 0,$$

这与任意 $k \in [1, +\infty)$ 时 $\psi(k) > 0$ 矛盾. 证毕.

3 一个应用

本节回答第 1 节末尾提出的问题.

定理 3.1 设 $f \in M^r(\Omega)$, $r = \frac{n}{p}$, u 为 $\mathscr{I}$ 在 $W_0^{1,q}(\Omega)$ 空间中的一个极小, 则存在 $\lambda > 0$, 使得 $\mathrm{e}^{\lambda|u|^{1-\alpha p'}} \in L^1(\Omega)$.

证明 如文 [2, 定理6.3] 的证明, 对 $\mathscr{I}$ 的极小 $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, 在 (1.9) 中取 $v = T_k(u) = \min\{-k, \max\{k, u\}\}$, 得到对任意 $k > 0$,

$$\int_{A_k} a(x, u) j(\nabla u) dx \leq \int_{A_k} f G_k(u) dx,$$

其中

$$A_k = \{x \in \Omega : |u(x)| \geq k\}, \quad G_k(u) = u - T_k(u).$$

继续 [2, 定理6.3] 的证明过程, 直到下面的不等式: 对任意 $h > k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|A_h| &\leq \frac{c}{(h-k)^{q^*}} [|A_k|^{(p-1-\frac{q}{r}+\frac{q}{n})\frac{q^*}{q(p-1)}} k^{\frac{\alpha p q^*}{p-1}} + |A_k|^{(q-1-\frac{q}{r}+\frac{q}{n})\frac{q^*}{q[p(1-\alpha)-1]}}] \\
&\leq \frac{c}{(h-k)^{q^*}} [|A_k|^{(p-1-\frac{q}{r}+\frac{q}{n})\frac{q^*}{q(p-1)}} h^{\frac{\alpha p q^*}{p-1}} + |A_k|^{(q-1-\frac{q}{r}+\frac{q}{n})\frac{q^*}{q[p(1-\alpha)-1]}}],
\end{aligned}$$

这里 q 如 (1.7). 对

$$\psi(k)=|A_k|,\quad c_1=c,\quad A=\frac{\alpha pq^*}{p-1},\quad B=\Big(p-1-\frac{q}{r}+\frac{q}{n}\Big)\frac{q^*}{q(p-1)},$$
$$C=\Big(q-1-\frac{q}{r}+\frac{q}{n}\Big)\frac{q^*}{q[p(1-\alpha)-1]},\quad D=q^*,\quad k_0=1.$$

应用引理 2.1: 注意到由 (1.4) 可得 $A<D$.

若 $r=\frac{n}{p}$, 则 $B=C=1$. 利用引理 2.1 中的 ii) 得到, 存在常数 τ 使得对任意 $k\geq 1$,

$$|\{|u|\geq k\}|\leq |\{|u|\geq 1\}|\mathrm{e}^{1-\left(\frac{k-1}{\tau}\right)^{\frac{D-A}{D}}}\leq |\Omega|\mathrm{e}^{1-\left(\frac{k-1}{\tau}\right)^{1-\alpha p'}}=|\Omega|e\mathrm{e}^{-2^{1+1-\alpha p'}\lambda(k-1)^{1-\alpha p'}},$$

这里 $2^{1+1-\alpha p'}\lambda=\left(\frac{1}{\tau}\right)^{1-\alpha p'}$, 且使用了 $\frac{D-A}{D}=1-\alpha p'$. 由上式, 若 $k\geq 2$, 则

$$\begin{aligned}|\{\mathrm{e}^{\lambda|u|^{1-\alpha p'}}\geq \mathrm{e}^{\lambda k^{1-\alpha p'}}\}|=|\{|u|\geq k\}&\leq|\Omega|e\mathrm{e}^{-2^{1+1-\alpha p'}\lambda(k-1)^{1-\alpha p'}}\\&\leq|\Omega|e\mathrm{e}^{-2^{1+1-\alpha p'}\lambda\left(\frac{k}{2}\right)^{1-\alpha p'}}=|\Omega|e\mathrm{e}^{-2\lambda k^{1-\alpha p'}}.\end{aligned}$$

设 $\tilde{k}=\mathrm{e}^{\lambda k^{1-\alpha p'}}$, 则有

$$|\{\mathrm{e}^{\lambda|u|^{1-\alpha p'}}\geq\tilde{k}\}|\leq\frac{|\Omega|e}{\tilde{k}^2},\quad\forall\,\tilde{k}\geq\mathrm{e}^{\lambda 2^{1-\alpha p'}}.$$

利用专著 [1, 引理3.11], 即 $g\in L^r(\Omega), r\geq 1$ 的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{r-1}|\{|g|\geq k\}|<+\infty.$$

上式取 $g=\mathrm{e}^{\lambda|u|^{1-\alpha p'}}$, $r=1$. 因为

$$\sum_{\tilde{k}=1+[\mathrm{e}^{\lambda 2^{1-\alpha p'}}]}^{\infty}|\{\mathrm{e}^{\lambda|u|^{1-\alpha p'}}\geq\tilde{k}\}|\leq|\Omega|e\sum_{\tilde{k}=1+[\mathrm{e}^{\lambda 2^{1-\alpha p'}}]}^{\infty}\frac{1}{\tilde{k}^2}<+\infty,$$

所以 $\mathrm{e}^{\lambda|u|^{1-\alpha p'}}\in L^1(\Omega)$. 证毕.

参考文献

[1] Boccardo L., Croce G., Elliptic Partial Differential Equations, De Gruyter, Berlin, 2014.

[2] Boccardo L., Orsina L., Existence and regularity of minima for integral functionals noncoercive in the energy space, *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze*, 1997, **25**: 95–130.

[3] Gao H., Deng H., Huang M., Ren W., Generalizations of Stampacchia lemma and applications to quasilinear elliptic systems, *Nonlinear Analysis*, 2021, **208**, 112297.

[4] Gao H., Huang M., Ren W., Regularity for entropy solutions to degenerate elliptic equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2020, **491**, 124251.

[5] Gao H., Leonetti F., Wang L., Remarks on Stampacchia Lemma, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, **458**: 112–122.

[6] Gao H., Zhang J., Ma H., A generalization of Stampacchia lemma and applications, submitted, arXiv:2212.04237.

[7] Giusti E., Direct Methods in the Clculus of Variations, World Scientific, River Edge, NJ, 2003.

[8] Kovalevskii A.A., Voitovich M.V., On the improvement of summability of generalized solutions of the Dirichlet problem for nonlinear equations of the fourth order with strengthend ellipticity, *Ukranian Mathematical Journal*, 2006, **58**: 1717–1733.

[9] Stampacchia G., Équations elliptiques du second ordre á coefficients discontinus, In: Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 16, Été, 1965, Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1966.

[10] Stampacchia G., Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann Inst. Fourier* (*Grenoble*), 1965, **15**: 189–258.